



Modellering

Matematisk undersøgelse af omverdenen.



Forlaget Pind & Bjerre

1



Modellering – hvad?

Matematisk modellering kan opfattes som en matematisk undersøgelse af vores omverden.

Matematisk modellering omfatter noget udenfor matematikken selv.

Matematisk modellering omfatter altid de to udsagn:

- Det kommer an på ...
- Hvor godt passer det?



Forlaget Pind & Bjerre

2

Modellering – hvad?



Eleverne skal **selv** træffe **valg** og **selv** stille **spørgsmål**



Forlaget Pind & Bjerre

3

Træffe valg - stille spørgsmål



Forlaget Pind & Bjerre

4

Modellering – hvorfor?



For at hjælpe med at redde verden ☺

- med alt fra populisme til klimaforandringer.

Ved at træffe gode valg, stille gode spørgsmål og regne på verden.

Ved almen dannelse af alle og uddannelse af eksperter.



Forlaget Pind & Bjerre

5

Klimakamp



Dr.dk 11/2 2019



Forlaget Pind & Bjerre

6

Modellering – hvordan?



Det starter med den åbne og undersøgende tilgang til matematik.

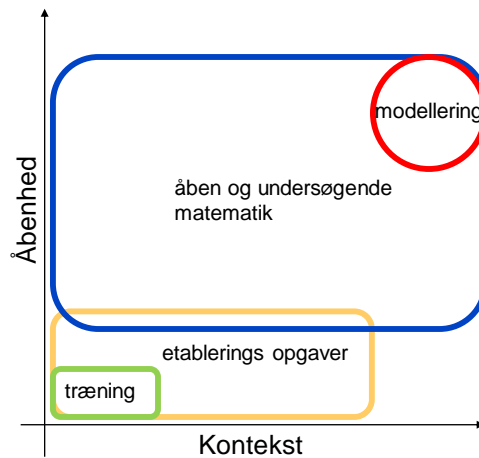
Allerede fra indskoling (gerne før 😊)



Forlaget Pind & Bjerre

7

Kontekst - åbenhed



Forlaget Pind & Bjerre

8

Små skridt



Der er langt fra træning til modellering. Der er en tendens til at springe mellem det meget lukkede og det meget åbne.

Mange tabes i de store spring.

Tag små skridt. Start lidt åben og med kun lidt kontekst.

Med Vygotskys ord: "Zonen for nærmeste udvikling"



Forlaget Pind & Bjerre

9

Åbenhed - kontekst



Måske er åbenheden vigtigere at arbejde med end konteksterne?



Forlaget Pind & Bjerre

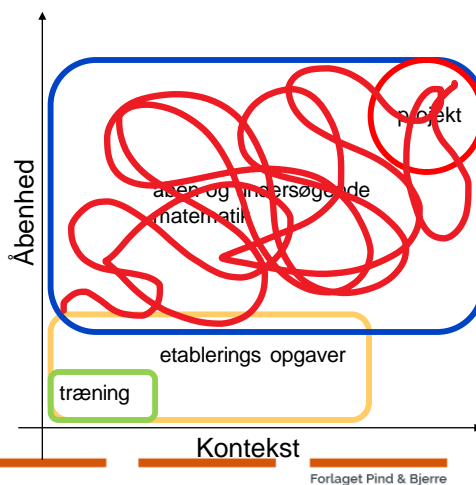
10

Den røde tråd



Det skal læres, det kommer ikke af sig selv.

Det kommer med mange små skridt fra det enkle mod det komplekse.



11

Hold i hånden



Det er tryggest at være i det grønne hjørne med træningsopgaver.

Ny læring kræver, at man bevæger sig ud af det grønne hjørne.

Hold eleverne i hånden på turen væk fra det grønne hjørne.

Forlaget Pind & Bjerre

12

Den røde tråd



Den røde tråd fra 0. til 10. klasse i åben og undersøgende matematik er det spørgende.

Det, at eleverne lærer at stille matematiske spørgsmål, være matematisk nysgerrig, matematisk åbne og undersøgende.



Forlaget Pind & Bjerre

13

Åbne opgaver



En opgave er åben, når der er flere mulige svar.



Forlaget Pind & Bjerre

14

Seks typer åben og undersøgende matematik



1. Svaret er givet
2. Manglende oplysninger
3. Undersøgelser
4. Modellering
5. Regnehistorier
6. Nye begreber



Forlaget Pind & Bjerre

15

1 Svaret er givet



"Svaret er givet" er matematisk Jeopardy. Vi starter med et svar, og finder på, hvad spørgsmålet kunne være.

Vender kendte sammenhænge om.

En nem måde at lave uendelig mange åbne opgaver.



Forlaget Pind & Bjerre

16

Svaret er givet - eksempel



Lav regnestykker der giver 100.



Forlaget Pind & Bjerre

17

De tre forskellige svar



A(lmindeligt), V(anskeligt) eller S(mart).

Pointen er ikke, at læreren skal afgøre om svaret er A, V eller S.

S er ikke finere end A eller V.

Hver elev skal anstrenge sig for at finde flere og forskellige slags svar.

Mærkaterne er private og primært en hjælp til at udfordre sig selv.



Forlaget Pind & Bjerre

18

Regnestykker der giver 100



Almindelige

$$50 + 50$$

$$60 + 40$$

Vanskelige

$$60 + 20 + 20$$

$$100,01 - 0,01$$

$$20 \cdot \sqrt[3]{125}$$

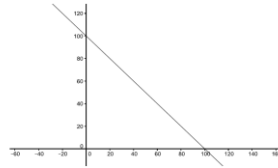
Smarte

$$100 + 0$$

$$100 : 1$$

Alle punkter på grafen

$$y = 100 - x \text{ har } x + y = 100$$



Forlaget Pind & Bjerre

19

Svaret er givet - eksempel



Lav algebraiske udtryk, der kan reduceres til 3a.

Forlaget Pind & Bjerre

20

2 Manglende oplysninger



Brug kendte opgaver og fjern oplysninger.

Elevernes forståelse af matematikken udvides, ligesom deres forståelse af opgavernes sprog og struktur udvides.



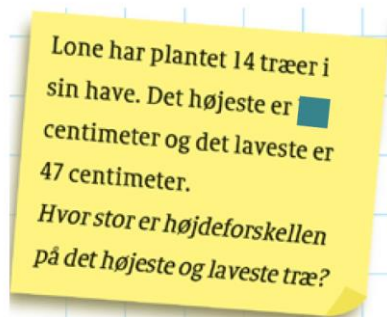
Forlaget Pind & Bjerre

21

Manglende oplysninger - eksempel



Træplantning, Format 2. kl



Forlaget Pind & Bjerre

22

Manglende oplysninger - eksempel



4. En familie ville leje et sommerhus i ferien. Det kostede 3800 kr. for 1 uge. Hvis man lejede det i 2 uger, fik man 2. uge billigere.

Hvor meget kostede det at leje sommerhuset i 2 uger? _____ kr.

Vælg den manglende oplysning.

Løs opgaven med de fastlagte oplysninger.

Rema 4



Forlaget Pind & Bjerre

23

3 Undersøgelser



En undersøgelse er karakteriseret af spørgsmålet: "Hvad nu hvis?"

Man starter ét sted, og stiller spørgsmål der åbner problemstillingen og leder én andre steder hen.



Forlaget Pind & Bjerre

24

Undersøgelser - eksempel



Startskud:

Her er et regnestykke: $44 + 31 = 66$. I kan nok ret hurtigt se, at det ikke passer. Jeres opgave er at få det til at passe. Alle cifre skal laves netop en større eller en mindre.

Man kan for eksempel prøve $55 + 42 = 75$. Her er de første fem cifre fra opgaven alle gjort en større, og det sidste ciffer i opgaven er gjort en mindre. Men det passer stadig ikke. Kan I få det til at lykkes?

Forlaget Pind & Bjerre

25

Undersøgelser - eksempel



Startskud:

Tegn en syv-takket stjerne i én streg, altså uden at løfte blyanten fra papiret.

Forlaget Pind & Bjerre

26

4 Modellering



Det vender vi tilbage til 😊



Forlaget Pind & Bjerre

27

5 Regnehistorier



Når eleverne selv laver tekstopgaver, udvikles deres forståelse af matematikken.

De bliver bedre til at genkende matematikken i andre tekstopgaver, og de bliver bedre til at bruge matematikken i deres eget liv.

Læreren må gerne komme med et eksempel – der er jo mange rigtige svar.

Og det er OK at elevernes første svar ligner lærerens meget.



Forlaget Pind & Bjerre

28

Regnehistorier - eksempel



Skriv en gangehistorie til $2 \cdot 5$.

2,3 · 5,4



Forlaget Pind & Bjerre

29

Regnehistorier - eksempel



Skriv en gangehistorie, hvor enheden meter bruges.



Forlaget Pind & Bjerre

30

6 Nye begreber



Eleverne skal give et volapykoord et matematisk indhold.

Eleverne skal skrive et par sider til en matematikbog om emnet, med eksempler, definition, regler, forklaring, metoder og opgaver.

Vigtige matematiske begreber som definitioner, sætninger og beviser. Fra det mere uformelle i indskoling til det mere præcise og faglige i udskoling.

Forlaget Pind & Bjerre

31

Nye begreber - eksempel



Hvad er et Superlige tal?

Forlaget Pind & Bjerre

32

Nye begreber - eksempel



Hvad er et Parallelohexagram?



Forlaget Pind & Bjerre

33

Barrierer



Hvorfor sker denne type undervisning i så begrænset omfang?

Hvilke barrierer er der?



Forlaget Pind & Bjerre

34

Barrierer



Mangel på opgaver
Lærerens faglige usikkerhed
Ny didaktisk kontrakt
Er det umagen værd?



Forlaget Pind & Bjerre

35

Mangel på opgaver



Der er få åbne opgaver i lærebøgerne.

Og de åbne opgaver der er, er ofte MEGET
åbne og MEGET virkelighedsnære – helt oppe
i det røde felt.

KiDM har gjort en KÆMPE forskel!



Forlaget Pind & Bjerre

36

Lærerens faglige usikkerhed



ALLE lærere vil med åben og undersøgende matematikundervisning opleve faglige spørgsmål fra eleverne, som de ikke umiddelbart kan svare på.

Det er OK!

Man skal forberede sig på, hvordan man vil håndtere det. "Lad os tænke sammen", "Lad os google det", "Jeg spørger en kollega" ...

Forlaget Pind & Bjerre

37

Didaktisk kontrakt



De uskrevne regler om hvordan man opfører sig i matematikundervisningen.



Forlaget Pind & Bjerre

38

Den gamle kontrakt



- Det er godt at være hurtig færdig og videre til næste opgave.
- Det er godt når man ikke behøver at stille spørgsmål.
- Der er ét rigtigt svar.
- Man skal ikke selv bestemme noget i opgaverne.
- Det er forbudt at kigge ved andre.
- Når man spørger læreren, forklarer han hvad man skal.



Forlaget Pind & Bjerre

39

Den gamle kontrakt



Overføres - uden at man opdager det - fra forældre, søskende, venner ...



Forlaget Pind & Bjerre

40

Den nye kontrakt



- Det er godt at fordybe sig og blive i samme opgave længe.
- Det er godt at stille flere spørgsmål.
- Man skal selv bestemme noget i opgaverne.
- Det er godt at komme med mange svar.
- Det er godt at bygge videre på andres svar.
- Læreren stiller spørgsmål, så man selv kan tænke videre.



Forlaget Pind & Bjerre

41

Den nye kontrakt



Er supersvær at indføre!

De uskrevne regler skal måske skrives ned – man skal i hvert tilfælde snakke om dem.



Forlaget Pind & Bjerre

42

Elsk fejl!



Når man tør lave fejl, tør man prøve noget nyt.

Hjernen vokser af fejl, der erkendes.



Forlaget Pind & Bjerre

43

Er det umagen værd?



"Det tager for lang tid – både i forberedelse og udførelse."

"Hvorfor ikke bare lære dem det, vi bliver målt på?"

- i nationale tests, Mat-prøver, MG-prøver, skriftlige eksamen med hjælpemidler, skriftlig eksamen uden hjælpemidler og mundtlig prøve?



Forlaget Pind & Bjerre

44

Er det umagen værd?



JAAAAAAAAAAAAA

for fanden!



Forlaget Pind & Bjerre

45

De bliver bedre til alt!



Eleverne bliver bedre til al matematik, når vi tør undervise mere åbent og undersøgende.

Også de svageste!

Når vi sørger for rammer, struktur og støtte i små skridt.

Der skal stadig trænes ind i mellem.

Eleverne skal stadig møde diverse tests før de skal testes.



Forlaget Pind & Bjerre

46

Bare lære dem det!



Vi kan ikke "bare" lære dem det.

Underforstået, bare fortælle eleverne hvad de skal gøre, og så gør de det – ellers fortæller vi dem det bare én gang til.

Hvis det virkede skulle vi se at komme i gang!

Men det gør det ikke – det bliver bevist dagligt overalt.



Forlaget Pind & Bjerre

47

Det "mere"



Den åbne og undersøgende tilgang, fra det inderste blå hjørne til det yderste røde modelleringsfelt, giver eleverne så meget mere med end det, der fanges ved diverse test.

Fx træffer valg, stiller spørgsmål, bliver nysgerrige, ...



Forlaget Pind & Bjerre

48

Man skal også ville!



Det er ikke nok at vide og kunne – man skal også ville og turde!

Pisa naturfagskompetence:

“elevernes vilje og evne til at engagere sig i en begrundet diskussion om videnskab og teknologi”

“Vilje” burde også være en del af matematikkompetencen.



Forlaget Pind & Bjerre

49

Tilbage til modellering



Forlaget Pind & Bjerre

50

Modelleringsspiralen



Forlaget Pind & Bjerre

51

De tre runder



1. Estimering
2. Konstruktion
3. Forbedring

Forlaget Pind & Bjerre

52

Estimering



Estimering er en MEGET grov første model.

Der vurderes diverse mål (længder mm)
- og der laves grov overslagsregning.



Forlaget Pind & Bjerre

53

Konstruktion



Den egentlige model konstrueres.

- nogle gange er det en fysisk model
- nogle gange er det en tegning
- nogle gange er det et regneudtryk
- nogle gange er det en formel

Modellen er altid udtryk for noget generelt.

Modellen er ikke et tal, men vejen hen til tallet.



Forlaget Pind & Bjerre

54

Forbedring



Konstruktionsrunden afsluttes altid med at teste modellen op mod den virkelighed, den modellerer:

Hvor godt passer den?

Selv den bedste model kan altid gøres bedre.

Det er en vigtig almen dannende erkendelse!



Forlaget Pind & Bjerre

55

Start simpelt



Både i estimeringen og i konstruktionen skal man starte simpelt – uendeligt og ulideligt simpelt.

"Det kommer an på" går amok og giver anledning til, at alt for store brød slås op.

Det skal være muligt at komme i gang.

"Hellere komme galt afsted end slet ikke komme afsted."



Forlaget Pind & Bjerre

56

Gode referencer



Helt fra estimeringen bliver gode referencer fra omverdenen vigtige.

Egne referencer er de bedste.

Arbejd aktivt med at eleverne opbygger deres eget referencelager.

Hvor tyk er din mobiltelefon?



Forlaget Pind & Bjerre

57

Modellering - eksempel



Lakridshjul er lakrids, der næsten har form som en spiral. Hvor lang er lakridssnøren egentlig, når spiralen rulles ud? Mange af jer har sikkert gjort det, men man kan jo også regne på det – inden man ruller lakridsen ud.

Jeres opgave er at lave en model for, hvor lang lakridssnøren i et lakridshjul er.

Modellen er her regnestykker og en generel forklaring af beregningsmetoden, gerne som formler.



Forlaget Pind & Bjerre

58

Modellering - eksempel



Eleverne skal parvis tegne én af dem i halv størrelse. De har papir, tusch og snor!

Modellen er her tegningen – og snakken er om, hvor godt tegningen ligner den virkelige person.



Forlaget Pind & Bjerre

59

Modellering - eksempel



Hvor meget fylder et håndklæde egentlig, når det er foldet? Hvordan skal man folde det, så det bedst passer til hylden eller skuffen?

Elevernes opgave er, at lave en model for, hvad et håndklæde fylder, når det er foldet.

Modellen er her regnestykker og en generel forklaring af beregningsmetoden, gerne som formler.



Forlaget Pind & Bjerre

60

Modellering - eksempel



Når man køber fryseposer har producenten skrevet et antal liter på pakken, f.eks. 8 liter. Men rummer en pose virkelig 8 liter? Fornemmelsen er, at det gør den nok ikke, i hvert tilfælde ikke, når vi binder en knude på den. Men vi kan jo regne på det.

Elevernes opgave er at lave en model for, hvor meget der kan være i en frysepose.

Modellen er her et regnestykke og en generel forklaring af beregningsmetoden, gerne som formler.

Forlaget Pind & Bjerre

61

Åben og undersøgende



Ikke al matematikundervisning kan være åben og undersøgende, men rigtig rigtig meget kan.

Det vil give bedre matematikere og bedre borgere, der er mere parate til at regne på verden omkring sig.

Forlaget Pind & Bjerre

62